Isometrias lineares

Álgebra Linear – Videoaula 21

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Definição

Uma **isometria linear** é uma transformação linear $T\colon V \to W$ entre EPIs tal que
$$\|T(v)\| = \|v\| \qquad \text{para todo } v \in V.$$

Isometrias lineares são as transformações que preservam toda a estrutura de um EPI.

Normalmente é mais prático verificar que $\|T(v)\|^2 = \|v\|^2$ para evitar raízes quadradas.

A **rotação por um ângulo** θ no plano é a transformação R_θ cuja matriz na base canônica é

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$R_\theta(x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y).$$

Então R_θ é uma isometria linear,

Isometrias lineares
Exemplo

$$R_\theta(x,y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y).$$

$$\begin{aligned}
\|R_\theta(x,y)\|^2 &= \|(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y)\|^2 \\
&= (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y)^2 + (\sin(\theta)x + \cos(\theta)y))^2 \\
&= \cos^2(\theta)x^2 - 2\sin(\theta)\cos(\theta)xy + \sin^2(\theta)y^2 \\
&\qquad + \sin^2(\theta)x^2 + 2\sin(\theta)\cos(\theta)xy + \cos^2(\theta)y^2 \\
&= \cos^2(\theta)x^2 + \sin^2(\theta)y^2 \\
&\qquad \sin^2(\theta)x^2 + \cos^2(\theta)y^2 \\
&= (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))x^2 + (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))y^2 \\
&= x^2 + y^2 \\
&= \|(x,y)\|^2,
\end{aligned}$$

portanto $\|R_\theta(x,y)\| = \|(x,y)\|$.

Em $\mathbb{R}^2$, a transformação

$$T(x,y) = (x+y, 0)$$

satisfaz

$$T(1,0) = T(0,1) = (1,0)$$

logo

$$\|T(1,0)\| = 1 = \|(1,0)\|, \qquad \|T(0,1)\| = 1 = \|(0,1)\|.$$

Mas T não é uma isometria:

$$\|T(1,1)\| = \|(2,0)\| = 2, \qquad \|(1,1)\| = \sqrt{2}.$$

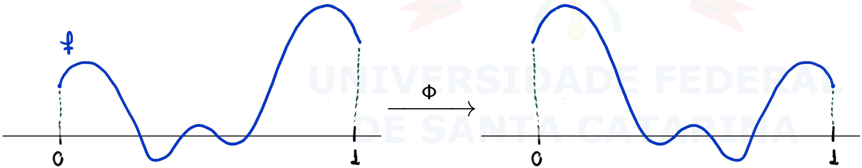
Considere $C[0,1]$ com o produto L^2:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

A transformação

$$\Phi\colon C[0,1] \to C[0,1], \qquad \Phi(f)(x) = f(1-x)$$

é um isomorfismo linear.



Φ é uma isometria:

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)\|^2 &= \int_0^1 |\Phi(f)|(x)^2 dx = \int_0^1 |f(x-1)|^2 dx \\ &= \int_0^1 |f(t)|^2 dt \qquad\qquad \text{troca } t = x-1 \\ &= \|f\|^2,\end{aligned}$$

portanto, $\|\Phi(f)\| = \|f\|$.

Isometrias lineares preservam produtos internos

Teorema

Uma transformação linear $T: V \to W$ entre EPIs é uma isometria se, e somente se, $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todos $u, v \in V$

A segunda propriedade diz que T **preserva produtos internos**.

Se T preserva produtos internos, então usamos $u = v$ para obter

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2,$$

logo T é uma isometria.

Isometrias lineares preservam internos

Se T é uma isometria, então

$$\|T(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$$

Expandindo ambos os lados,

$$\|T(u)\|^2 + 2\langle T(u), T(v)\rangle + \|T(v)\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

Mas como T é isometria, $\|T(u)\| = \|u\|$ e $\|T(v)\| = \|v\|$, logo

$$2\langle T(u), T(v)\rangle = 2\langle u, v\rangle$$
$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Teorema

Uma transformação linear entre EPIs $T\colon V \to W$ é uma isometria se, e somente se, $T^*T = \mathrm{id}_V$.

$$
\begin{aligned}
T \text{ é isometria} &\iff \text{para todo } v \text{ e para todo } x, \quad \langle T(v), T(x)\rangle = \langle v, x\rangle \\
&\iff \text{para todo } v \text{ e para todo } x, \quad \langle T^*T(v), x\rangle = \langle v, x\rangle \\
&\iff \text{para todo } v, \quad T^*T(v) = v \\
&\iff T^*T = \mathrm{id}_V
\end{aligned}
$$

Corolário

Uma transformação linear $T\colon V \to W$ entre EPIs de mesma dimensão finita é uma isometria se, e somente se, T é inversível e $T^* = T^{-1}$.

Definição

Uma matriz real $O \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ é **ortogonal** se

$$O^t = O^{-1}$$

Teorema

Sejam V, W EPIs com $\dim(V) = \dim(W)$, com bases ortonormais ordenadas $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ e $T \in \mathrm{L}(V, W)$. Então T é uma isometria se, e somente se, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é ortogonal.

Seja $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Já sabemos que $A^t = [T^*]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Assim,

$$\begin{aligned} T \text{ é isometria} &\iff T^*T = \mathrm{id}_V \\ &\iff [T^*T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &\iff [T^*]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = I_n \\ &\iff A^tA = I_n \\ &\iff A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \text{ é ortogonal} \end{aligned}$$

Matrizes ortogonais

Consideremos

$$O = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \cdots & o_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \qquad O^t = \begin{bmatrix} — & o_1 & — \\ — & o_2 & — \\ & \vdots & \\ — & o_n & — \end{bmatrix}$$

Então

$$O^t O = \begin{bmatrix} — & o_1 & — \\ & \vdots & \\ — & o_n & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ o_1 & \cdots & o_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle o_1, o_1 \rangle & \langle o_1, o_2 \rangle & \cdots & \langle o_1, o_n \rangle \\ \langle o_2, o_1 \rangle & \langle o_2, o_2 \rangle & \cdots & \langle o_2, o_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle o_n, o_1 \rangle & \langle o_n, o_2 \rangle & \cdots & \langle o_n, o_n \rangle \end{bmatrix}$$

Matrizes ortogonais

São equivalentes:

1. O é ortogonal
2. $O^tO = I_n$
3. As colunas de O são ortonormais (com respeito ao produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$)
4. O^t é ortogonal
5. $OO^t = I_n$
6. As linhas de O são ortonormais (com respeito ao produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$)

Matrizes ortogonais como matrizes de mudança de base

Teorema

Uma matriz $O \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se, e somente se, O é uma matriz de mudança de uma base ortonormal a outra base ortonormal em um EPI.

Se $O = \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é uma matriz de mudança entre bases ortonormais de um EPI V, então

$$\begin{aligned} O^t O &= \left[\mathrm{id}^*\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= \left[\mathrm{id}^* \mathrm{id}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &= \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Matrizes ortogonais como matrizes de mudança de base

Tome qualquer EPI V de dimensão n com uma base ortonormal ordenada $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Se O é ortogonal, então é inversível. Então $O = \left[\mathrm{id}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ para algum base ordenada $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Vamos verificar que $\mathcal{B}$ é ortonormal. Para cada i, seja o_i a i-ésima coluna de O. Isso significa que

$$\left[b_i\right]^{\mathcal{A}} = o_i.$$

Matrizes ortogonais como matrizes de mudança de base

Como $\mathcal{A}$ é ortonormal,

$$\langle b_i, b_j \rangle = \left[b_i\right]^{\mathcal{A}} \cdot \left[b_j\right]^{\mathcal{A}} = o_i \cdot o_j,$$

onde "$\cdot$" denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

Como O é ortogonal, suas colunas são ortonormais com respeito ao produto escalar usual. Ou seja,

$$\langle b_i, b_j \rangle = o_i \cdot o_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

o que significa que $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ é ortonormal.